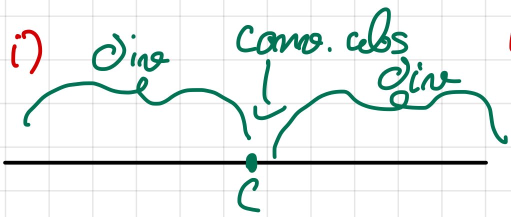
Aula 2

Resumo Teorema Slide 6

$R \to$ Raio de Convergência $\quad C \to$ Centro da série

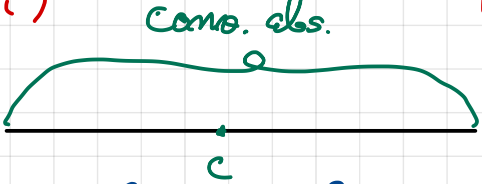
I.C. $\to$ Intervalo de Convergência

i)



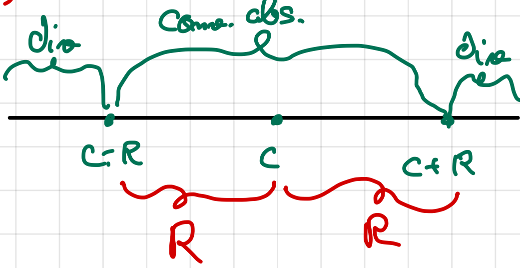
$I.C. = \{c\}, R = 0$

ii)



$I.C. = \mathbb{R}\,;\ \mathbb{R} = +\infty$

iii)

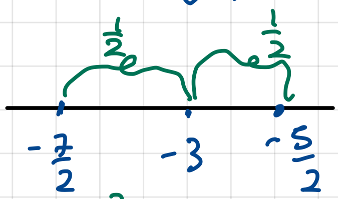


$I.C. =]c-R; c+R[$

Ex.1 a) $c=0$, $D.C. = \mathbb{R} \rightsquigarrow R = +\infty\,;\ I.C. = \mathbb{R}$

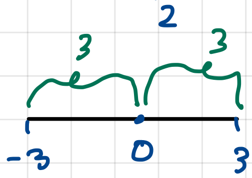
b) $c = 2$; $D.C. = \{2\} \rightsquigarrow R = 0\,;\ I.C. = \{2\}$

c) $c = -3$; $D.C. =]-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}]$



$\rightsquigarrow R = \frac{1}{2}\,;\ I.C. =]-\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}[$

d) $c = 0$; $D.C. = [-3, 3]$



$\rightsquigarrow R = 3\,;\ I.C. =]-3; 3[$

Ex.2) a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n!}{n-1}(x-2)^n$ $\quad \boxed{c=2}$

$\to a_n \neq 0, \forall n \geq 2$

1º Passo: $$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{n!}{n-1}}{\frac{(n+1)!}{n+1-1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!\times n}{(n+1)!\times(n-1)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n!\times n}{(n+1)\times n!\times(n-1)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2-1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$$

maior grau

$\boxed{R=0}$

2º Passo: $I.C. = D.C. = \{2\}$ (conv. abs.)

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-2)^n}{n^{2n}}x^n$ $\quad c=0$ (Usar a outra fórmula R)

$a_n \neq 0, \forall n \geq 1$

1º Passo: $$R = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{(-2)^n}{n^{2n}}\right|}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{2^n}{(n^2)^n}}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{2}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2} = +\infty$$

$\boxed{R = +\infty}$

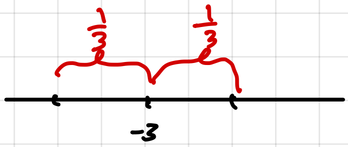
2º Passo: $I.C. = D.C. = \mathbb{R}$

c) $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n (x+5)^n$ $\quad c=-5$

↳ $a_n \neq 0, \forall n \geq 0$

1º Passo: $R = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|3^n|}} = \frac{1}{3}$

2º Passo:



c. aux $-5-\frac{1}{3} = -\frac{16}{3}$

$-5+\frac{1}{3} = \frac{-14}{3}$

I. C. = $]-\frac{16}{3}; \frac{-14}{3}[$

3º Passo: $\boxed{x=-\frac{16}{3}}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n (x+5)^n \xrightarrow{x=-\frac{16}{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n \left(-\frac{16}{3}+5\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$$

→ Série Geométrica de razão $r=-1$

Como $|r|=1\geq 1$ a série diverge.

$\boxed{x=-\frac{14}{3}}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n (x+5)^n \xrightarrow{x=-\frac{14}{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n \left(-\frac{14}{3}+5\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{1}_{a_n}$$

→ Usar Condição Necessária de Convergência

Como $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1 \neq 0$ pela C.N.C a série diverge.

Logo D.C. = $]-\frac{16}{3}; \frac{-14}{3}[$ (conv. abs.)

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n6^n}(3x-2)^n$

Atenção: Não podem aplicar diretamente a fórmula de R

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n6^n}\left(3\left(x-\frac{2}{3}\right)\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n6^n} \times 3^n \left(x-\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n}\left(x-\frac{2}{3}\right)^n \quad c=\frac{2}{3}$$

↳ $a_n \neq 0, \forall n \geq 1$

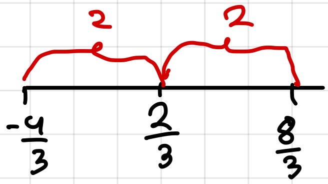
1º Passo:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n}}{\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times (n+1)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{\frac{1}{2}n} \underset{\text{maior grau}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\frac{1}{2}n} = 2$$

$\boxed{R=2}$

2º Passo:



I. C. = $]-\frac{4}{3}; \frac{8}{3}[$ (conv. abs.)

3º Passo: $\boxed{x=-\frac{4}{3}}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n}\left(x-\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{x=-\frac{4}{3}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n}\left(-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

→ Série de Dirichlet com $\alpha=1\leq 1$, logo diverge

$\boxed{x = \frac{8}{3}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{3})^n}{n}\left(x-\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{x=\frac{8}{3}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{3})^n}{n}\left(\frac{8}{3}-\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ → Série alternada

Série dos módulos $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ → diverge.

Usar Critério de Leibniz para estudar a natureza de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \times \frac{1}{n}$

$u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ ✓
- $\displaystyle u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}_{\times n} - \frac{1}{n}_{\times n+1} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)}$ $\leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, logo a sucessão u_n é decrescente

Pelo crit. de Leibniz a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ converge e a convergência é simples (pois a série dos módulos diverge)

Então $D.C. = \left]-\frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right]$ conv. abs. em $\left]-\frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right[$ e conv. simp. em $x = \frac{8}{3}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{9^n\sqrt{n+1}}x^{2n}$ → Não podemos calcular diretamente o R

1ª opção: resolver como no ex. 3 da Aula 1

2ª opção: Aplicar uma mudança de variável

(para as mais fáceis)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{9^n\sqrt{n+1}}x^{2n} \xrightarrow{z=x^2} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{9^n\sqrt{n+1}}z^n$ $c=0$

$a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

1º Passo:

→ da série da variável z

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{9^n\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{9^{n+1}\sqrt{n+1+1}}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{9^{n+1}\sqrt{n+2}}{9^n\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} 9\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}$$

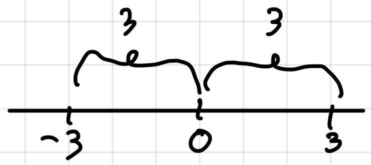
maior grau

$= 9\times 1 = 9$

$\boxed{R=9}$ → na variável z

Como $z = x^2$ então o valor de R da série inicial é $\boxed{R = \sqrt{9} = 3}$

2º Passo:



I.C. $=]-3; 3[$ (conv. abs.)

3º Passo: $\boxed{x=3}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{9^n\sqrt{n+1}} x^{2n} \xrightarrow{x=-3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{9^n\sqrt{n+1}} (-3)^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Usar critério da comparação (limite)

Seja $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \dots = 1 \in \mathbb{R}^+$$

Pelo crit. de comparação, as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ têm a mesma natureza

$\hookrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ -> Série de Dirichlet com $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ logo diverge.

Portanto a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ diverge

$\boxed{x=3}$ → Dá a mesma série que a anterior e então diverge.

Então D.C. $=]-3;3[$ (conv. abs.)

Ex. 3)

a) Hipóteses: • $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

• I.C. $=]-R, R[$

• Abs. conv. em $x=-R$

Tese: Abs conv. em $x=R$

Demonstração: Por hipótese, como $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é abs. conv. em $x=-R$ então a série dos módulos $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(-R)^n|$ é convergente

Mas $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(-R)^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n R^n|$, donde se conclui que a série também é abs. conv. em $x=R$.

b) Hipóteses: • $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$; $c=0$

• D.C. $=]-R:R]$

Tese: A série é simp. conv. em $x=R$

Demonstração: Se a série fosse abs. conv. em $x=R$, pela alínea a) a série teria de ser abs. conv. em $x=-R$ e portanto seria D.C. $= [-R, R]$ o que contradiz a hipótese.

Portanto a série é simp. conv. em $x=R$.